CBS
Colegio Bautista Shalom

Matemática 4
Cuarto BACO PFS
Primer Bimestre

Contenidos

LENGUAJE ALGEBRÁICO

- ✓ EXPRESIÓN ALGEBRAICA.
- ✓ OPERACIONES ALGEBRÁICAS.
- ✓ SUMA Y RESTA.
- ✓ PRODUCTO Y COCIENTE.
- ✓ TEORÍA DE MONOMIOS Y OPERACIONES.
- ✓ POLINOMIOS.
- ✓ EXPRESIÓN ALGEBRÁICA.
- ✓ RECORDEMOS LO QUE ES POLINOMIO.
- ✓ FUNCIONES POLINÓMICAS.
    - ¿PARA QUÉ NOS SIRVEN?
- ✓ IGUALDAD DE POLINOMIOS.
- ✓ VALOR DE UN POLINOMIO.
- ✓ ¿QUÉ SUCEDE EN EL CASO DE EXPRESIONES ALGEBRAÍCAS CON MÁS DE UNA VARIABLE?
- ✓ OPERACIONES CON POLINOMIOS.
    - SUMA Y RESTA DE POLINOMIOS.
    - PRODUCTO DE POLINOMIOS.
        - PRODUCTO DE UN NÚMERO REAL POR UN POLINOMIO.
        - PRODUCTO DE POLINOMIO POR POLINOMIO.
        - CASOS ESPECIALES DEL PRODUCTO DE POLINOMIOS.
    - DIVISIÓN DE POLINOMIOS.
- ✓ DIVISIÓN SINTÉTICA.

NOTA: conforme vayas avanzando en tu aprendizaje debes realizar uno de los ejercicios. Copia y desarrolla cada ejercicio en hojas blanco bond, realiza cada gráfica en hojas milimetradas y sigue las instrucciones de tu catedrático(a) para entregar.

LENGUAJE ALGEBRÁICO

Exceptuando la química, la física o la música, en ninguna otra ciencia o arte como en el álgebra ha influido tanto en su desarrollo la adopción de una simbología adecuada. A lo largo de los siglos se ha ido configurando un conjunto específico de símbolos y números que permiten expresar y homogeneizar toda la teoría existente. Este amplio conjunto recibe la denominación de **lenguaje algebraico**. (Alfonso, 2009).

El uso del lenguaje algebraico nos permite traducir enunciados coloquiales a expresiones algebraicas, las cuales nos dan pauta a resolver problemas de la vida cotidiana. Hasta el momento has realizado problemas que implican operaciones básicas como lo son: suma, resta, multiplicación y división. Estas operaciones también continúan utilizándose en el lenguaje algebraico, pero con otras palabras que hacen referencias a las mismas operaciones, tal y como se observa en la siguiente tabla:

SUMA	RESTA	MULTIPLICACIÓN	DIVISIÓN
Aumentar Mayor que Incrementar Más grande que	Disminuir Menor que Diferencia Perder o perdida	Producto Múltiplo Veces Doble/Triple/Cuádruple/etc.	Cociente Dividido Proporción Razón Mitad/Tercera/Cuarta/etc.

Probablemente ya habías escuchado estas palabras, pero no sabías a que se referían cada una de ellas porque casi no las utilizamos, sin embargo, cuando escuchas la expresión *"aumenta 3 quetzales a la cuenta"* sabes que debes realizar una suma. Puedes revisar las siguientes tablas que muestran algunos ejemplos de cómo se pueden usar las expresiones anteriores:

Suma	
Cuatro más que un número	$x + 4$
La suma de dos números	$z + y$
Un número aumentado en 9	$y + 9$
Un número sumado a otro número	$x + y$
Cinco más un número	$5 + y$

Resta	EXPRESION ALGEBRAICA
La diferencia entre dos números	$x - y$
Cuatro reducido por un número	$4 - x$
Un número reducido por 5	$x - 5$
Nueve menos que un número	$x - 9$
Siete restado de un número	$x - 7$
Ocho menos un número	$8 - x$

Multiplicación	
Tres multiplicado por dos	$3(2)$
El producto de dos números	xz
El doble de un número	$2y$
Un cuarto de un número	$\frac{1}{4}x$
Cuatro por un número	$4y$

División	
Un número dividido entre 5	$\frac{x}{5}$ o $x \div 5$
Ocho dividido entre un número	$\frac{8}{x}$ o $8 \div x$
El cociente de dos número	$\frac{x}{z}$ o $x \div z$
La mitad de un número	$\frac{x}{2}$ o $\frac{1}{2}x$

También puedes observar el siguiente video, para complementar lo antes expuesto. Para ello, escanea el código QR.

FLOWCODE
PRIVACY.FLOWCODE.COM

EXPRESIÓN ALGEBRAICA

Cualquier combinación de números representados por letras o por letras y cifras, vinculados entre sí por las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.

$$2x^3y+3x+z \qquad y^3-\frac{3}{y}+y^2 \qquad \frac{x+2y}{3x-y} \qquad -3\sqrt{x}+\frac{1}{x} \qquad -5xyz^2$$

¡IMPORTANTE! Para el estudio del presente tema, se considerarán expresiones algebraicas en las que intervienen solamente números reales.

Expresiones algebraicas

- **Racionales**
  No hay letras afectadas por el signo radical
  - **Fraccionarias**
    Hay por lo menos una letra en el divisor.
    Ejemplo: $2x+\dfrac{3}{x^2+1}$
  - **Enteras**
    No hay letras en el divisor.
    Ejemplo: $2x^2y+xyz+7$
- **Irracionales**
  Hay por lo menos una letra afectada por el signo radical
  Ejemplo: $\sqrt{x}+3x^2$

OPERACIONES ALGEBRÁICAS

SUMA Y RESTA

Identificar un monomio y realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación y división permite prepararse para las operaciones más complejas del Álgebra. Antes de iniciar su estudio, te recomendamos que repases las propiedades de los exponentes y raíces.

PRODUCTO Y COCIENTE

El resultado de la **multiplicación (división) de monomios** es otro monomio que tiene por coeficiente **el producto (cociente)** de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene multiplicando (dividiendo) las potencias que tengan igual base, es decir, sumando (restando) los exponentes teniendo en cuenta los signos.

Previo a que aprendas el tema debes dominar la Ley de Exponentes. A continuación, encontrarás un Código QR que debes escanear para ingresar al vídeo tutorial.

Escanea cada uno de los Códigos QR e ingresa a los vídeo tutoriales (en su orden de izquierda a derecha) y así aprender más del tema.

TEORÍA DE MONOMIOS Y OPERACIONES

POLINOMIOS

Aplicando álgebra podemos pasar del número al símbolo, de lo particular a lo general. La riqueza que posee el lenguaje algebraico nos facilita obtención de relación, propiedades y encontrar solución a los problemas que nos plateen. Para trabajar en matemática sin mayor dificultad, se debe operar convenientemente con expresiones algebraicas de forma; tal que, se puedan transformar en otras expresiones equivalentes. Estas más fáciles de resolver. En el campo de la ingeniería, al momento de realizar el modelado matemático de un problema, es frecuente obtener un polinomio. Para encontrar la solución de la situación planteada es necesario conocer las "raíces" de dicho polinomio.

Recordemos que un **Polinomio** es una suma algebraica de monomios de distinto grado.

Por ejemplo:

$$x^4 - 3x^2 + 2y + 1$$

Durante el desarrollo de este tema nos referiremos a polinomios donde la parte literal está constituida solamente por una variable elevada a cualquier exponente natural.

Los polinomios que se estudiarán son expresiones algebraicas de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

En donde:

- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ son números reales llamados coeficientes.
- a_n es el coeficiente principal.
- a_0 es el término independiente.
- x es la variable, también conocida con el nombre de indeterminada.
- Los exponentes $n, n-1, \ldots, 2, 1, 0$, son números naturales.
- n es el grado del polinomio y se indica $grado(P(x)) = n$.

Por ejemplo:

- ✓ $Q(x) = 3x^5 - 7x^3 + 2x^2 + 1$ es un polinomio de grado 5, que tiene coeficiente principal $a_5 = 3$ y el término independiente es $a_0 = 1$.
- ✓ $G(x) = 2$ es un polinomio de grado cero.
- ✓ $S(x) = 0$ se llama polinomio nulo y no tiene grado.

FUNCIONES POLINÓMICAS

Cada polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ tiene asociada una función polinómica *f* con dominio y codominio en *R*, definida por la fórmula:

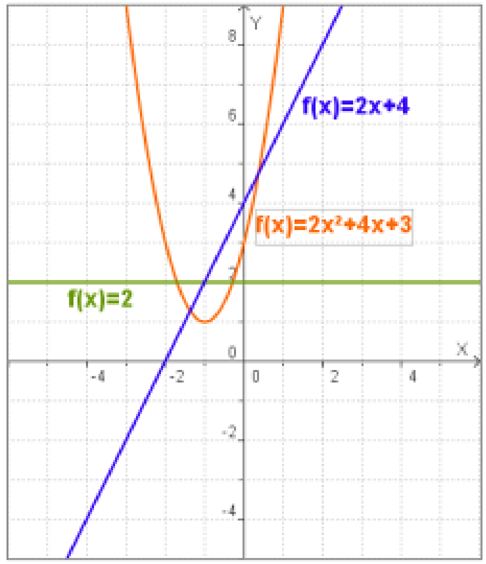
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 .$$

¿PARA QUÉ NOS SIRVEN?

Cuando se recogen los datos de un experimento se obtiene una nube de puntos que deben ser estudiados, en la imagen se ve cómo un programa ajusta esa nube a distintas funciones polinómicas (curvas de regresión), indicando la bondad del ajuste en cada caso.

Las funciones polinómicas son aquellas cuya expresión es un polinomio como, por ejemplo:

$$f(x) = 3x^4 - 5x + 6$$



Se trata de funciones continuas cuyo dominio es el conjunto de los números reales. En la gráfica de abjo se pueden ver las gráficas de las funciones polinómicas de grado menor que 3, que son las que se estudiarán en esta quincena.

Observa la forma según su grado:

a. las de grado cero como $f(x) = 2$, son rectas horizontales;
b. las de grado uno, como $f(x) = 2x + 4$, son rectas oblicuas;
c. las de grado dos, como $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$, son parábolas cuyo eje es paralelo al de ordenadas.

Para la función del inciso b y c; se realizan los cálculos correspondientes para encontrar los pares ordenados (x, y).

Estos son los puntos que se colocarán en el plano cartesiano en los ejes x e y.

Al unirlos, se forma la gráfica correspondiente a cada función.

EJERCICIO 01: desarrolla y grafica cada función como corresponda. Practiquemos la representación gráfica de funciones polinómicas. A continuación, en cada caso haremos una tabla de valores y comprueba que los puntos obtenidos son de la gráfica.

1) $f(x) = 3$ **2)** $f(x) = -2x + 3$ **3)** $f(x) = x^2 - x + 2$ **4)** $f(x) = x - 3$

5) $f(x) = x^2 - 2$ **6)** $f(x) = -5$ **7)** $f(x) = x^2 - 3x + 1$ **8)** $f(x) = -x + 4$

9) $f(x) = x + 10$ **10)** $f(x) = \frac{4x}{2}$ **11)** $f(x) = 3 + x$ **12)** $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

13) $f(x) = x^3 + 1$ **14)** $f(x) = x + 1$ **15)** $f(x) = 2x$

EJERCICIO 02: realiza en papel milimetrado cada una de las gráficas del **EJERCICIO 01,** encontrando sus pares ordenados sustituyendo la variable en la ecuación utilizando los números del -20 hasta el 20. Al finalizar ordena tus hojas y guárdalas en un folder con gancho (primero la hoja en la cual realizaste tu tabla de valores (x, y) y luego la hoja milimetrada correspondiente); colócale su respectiva carátula y presenta a tu catedrático/a.

EJERCICIO 03: tu catedrático/a te proporcionará 15 funciones más. Con ellas debes realizar el mismo procedimiento descrito en el **EJERCICIO 02,** con el cual trabajaste las funciones del **EJERCICIO 01.**

IGUALDAD DE POLINOMIOS

Los polinomios:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

son iguales si:

- tienen el mismo grado, es decir $n = m$
- $a_n = b_m$, $a_{n-1} = b_{m-1}$, ... , $a_0 = b_0$

Ambos polinomios tienen el mismo grado y los coeficientes de cada uno de los términos del miso grado son iguales.

Por ejemplo:

$$P(x) = \underline{2x^3} - \underline{5x^2} + \underline{3x} - \underline{8}$$

$$Q(x) = \underline{3x} - \underline{8} - \underline{5x^2} + \underline{2x^3}$$

Como puedes observar este el polinomio *P(x)* y *Q (x)* son iguales.

Poseen mismos términos de mismo grado. Estos se encuentran en distinto orden, pero son los mismos.

EJERCICIO 04: desarrolla y verifica la igualdad de los siguientes pares de polinomios. Escribe en el subrayado si son o no; iguales.

1)
$$S(y) = 5y^4 + 2y^3 - 4y^2 + 2$$
$$R(y) = 2y^3 + 5y^4 + 2 - 4y^2$$

2)
$$P(z) = -4z^4 - 20z^3 - 15z^5 - 30$$
$$Q(z) = -20z^3 - 30 - 15z^5 - 4z^4$$

3)
$$T(a) = 5a^4 + 2a^3 - 4a^2 + 2a$$
$$U(a) = 2a^3 + 5a^4 - 2a + 4a^2$$

4)
$$M(x) = 2x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 105$$
$$N(x) = 3x^3 + 5x^4 + 100 - 4x^2$$

5)
$$S(b) = 32b^4 - 16b^3 - 4b^2 + 2b$$
$$U(b) = 16b^3 + 32b^4 + 2b - 4b^2$$

6)
$$S(w) = 26w - 13w^2 - 52w^4 + 104$$
$$U(w) = 104 - 52w^4 + 26w - 13w^2$$

7)
$$T(x) = 2x^2 - 20$$
$$P(x) = -20 + 2x^3$$

8)
$$F(x) = 4x^3 + 2x^5 - 7x^7 14x$$
$$G(x) = 2x^5 + 4x^3 - 14x + 7x^7$$

9)
$$Q(x) = 14x - 7x^2 - 21x^4 + 28$$
$$O(x) = 28 - 21x^4 + 14x - 7x^2$$

10)
$$T(x) = 33x^4 + 66x^3 + 15x - 9x^2$$
$$U(x) = -15x + 66x^3 + 33x^4 + 9x^2$$

11)
$$M(x) = 3x^4 - 12x^3 + 45 + 9x^5$$
$$N(x) = 9x^3 + 75 - 12x^2 + 3x^6$$

12)
$$L(x) = 22x^4 + 23x^3 - 11x^2 - 12x$$
$$M(x) = 23x^3 + 22x^4 - 12x + 11x^2$$

13)
$$A(w) = 10w - 20w^2 - 30w^4 + 40$$
$$B(w) = 40 - 30w^4 + 10w - 20w^2$$

14)
$$C(x) = 35x - 15x^3 - 20x^4 + 10$$
$$D(x) = 10 - 20x^4 + 35x - 15x^3$$

15)
$$M(x) = 17x - 13x^2 - 11x^4 + 59$$
$$N(x) = 59 - 11w^4 + 17w - 13x^2$$

VALOR DE UN POLINOMIO

El valor numérico de una expresión algebraica en general (y por supuesto de un polinomio en particular) es el resultado que se obtiene al asignar un valor determinado a su variable y realizar la operatoria correspondiente. En otras palabras, si tu catedrático/a te pide que determines el valor numérico de tal o cual expresión algebraica, será necesario que te indique como parte de las indicaciones, el valor que debes asignarle a la variable de la misma expresión algebraica.

Se llama valor numérico de un polinomio $P(x)$ en $x=k$, al valor que toma el polinomio cuando se reemplaza *x* por *k*.

Si…

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0,$$

…entonces el valor de $P(x)$ en $x=k$ es:

$$P(k)=a_nk^n+a_{n-1}k^{n-1}+\ldots+a_2k^2+a_1k+a_0.$$

Por ejemplo:

$P(x)=2x^3+3x^2+5x+8$

$cuando\ \ x=2$

$$P(2)=2\bullet 2^3+3\bullet 2^2+5\bullet 2+8$$
$$2\bullet 8+3\bullet 4+10+8$$
$$16+12+10+8$$
$$46$$

EJERCICIO 05: desarrolla y verifica el valor numérico de los siguientes polinomios. En el subrayado coloca tu respuesta y al finalizar el ejercicio.

$3(2)^2-\ 2(2)^3+3=$

1) $3x^2-\ 2x^3+3\quad con\ \ x=2$

$3(4)-\ 2(8)+3=$

$12-\ 16+3=$

$Valor\ del\ Polinomio\ =\ -1$

2) $x^3-20\qquad con\ \ x=10$

3) $2a^2-3ab^2+1\quad con\ a=5$, $b=\ 3$

4) $10w^2+3w^3-5w^2+2w-10$ $con\ w=1$

5) $2x^2+3x^3-2x+1=$ $con\ x=-3$

6) $x^2-2x+3=$ $con\ x=-10$

7) $x^2-3x-5=$ $con\ x=5$

8) $2x^4-5x^3-x^2+3x-1=$ $con\ x=2$

9) $5a-2b+3c-d=$ $con\ a=-20\quad con\ b=15$ $con\ c=35\quad con\ d=-3$

10) $3y^3-2y^2+32y=$ $con\ y=-4$

¿QUÉ SUCEDE EN EL CASO DE EXPRESIONES ALGEBRAÍCAS CON MÁS DE UNA VARIABLE?

Para poder realizar correctamente el ejercicio, al igual que en el caso anterior, siempre debe ser especificado el valor numérico que se le asigna a cada variable; de otro modo no hay posibilidad alguna porque si se da para una sola de las variables, pero no para las dos, o tres que tenga, nunca se podrá operar totalmente hasta llegar al resultado final, vale decir, un valor ciento por ciento numérico, sin ninguna expresión literal. Analiza los siguientes ejemplos:

Hallar el valor numérico del siguiente polinomio, para x= 1

$$x^3+\ 3x^2\ -\ 2x\ -\ 6\ \ =$$

$$(1)^3+3(1)^2-2(1)-6=$$

$$1+3-2-6=$$

$$4-8=-4$$

El valor numérico de $x^3+\ 3x^2\ -\ 2x-\ 6$, para x = 1, es de -4.

Hallar el valor numérico del mismo polinomio anterior, pero esta vez para x = -1.

Procedemos igual que en el caso anterior, pero en vez de 1 sustituimos con -1. Hay que ser muy cuidadoso, especialmente con regla de los signos al operar.

Veamos cómo quedaría:

$$x^3 + 3x^2 - 2x - 6 =$$

$$(-1)^3 + 3(-1)^2 - 2(-1) - 6 =$$

$$-1 + 3 + 2 - 6 =$$

$$5 - 7 = -2$$

EJERCICIO 06: completa la siguiente tabla:

x, y	**7*x* – 5*y***	***x* + 3*y***	**3*y* – 2*xy* + 8**
$x = 0,\ y = 1$			
$x = -1,\ y = 1$			
$x = -1,\ y = -1$			
$x = 2,\ y = -1$			
$x = -2,\ y = 0$			
$x = 4,\ y = -2$			
$x = \frac{1}{3},\ y = -\frac{1}{3}$			
$x = 2,\ y = -\frac{1}{2}$			

EJERCICIO 07: completa la siguiente tabla:

a	***b***	$a^2 - b^3$	$0{,}5a + 0{,}3b$	$\frac{3}{5}a - \frac{7}{10}b$
–2	5			
0,1	–0,2			
$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{3}$			
0	–1			
–4	–3			
$\frac{1}{2}$	0			

–0,2	0,2			
5	10			

EJERCICIO 08: desarrolla y calcula los valores numéricos de los siguientes polinomios. Escribe en el subrayado tu respuesta.

Cuando x = 2, 5, 7, –3 y 0 (del inciso 1 al 5); y con: x = -3 (del inciso 6 al 10).

1) $\left(\frac{3+x}{5}\right)^2$ **2)** $\frac{3+x^2}{5}$ **3)** $3+\frac{x^2}{5}$ **4)** $3+\left(\frac{x}{5}\right)^2$ **5)** $\frac{(3+x)^2}{5}$

6) $2x + 1$ **7)** $(2x)^2 - 1$ **8)** $(2x + 3)^2$ **9)** $2\,(3x)^2$ **10)** $\frac{2+3x}{6-x}$

OPERACIONES CON POLINOMIOS

SUMA Y RESTA DE POLINOMIOS

La suma de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ es el polinomio $P(x)+Q(x)$ que se obtiene sumando los monomios semejantes que se encuentran en $P(x)$ y $Q(x)$.

Por ejemplo. Sean los polinomios:

$$P(x) = -3x^2 + 2x^4 - 8 - x^3 + \tfrac{1}{2}x$$

$$Q(x) = -5x^4 - 10 + 3x + 7x^3$$

Para sumar dos polinomios, hay que sumar entre sí los coeficientes de los términos del mismo grado. El resultado de sumar dos términos del mismo grado es otro término del mismo grado.

$$\begin{array}{rl} \; 2x^4 - x^3 - 3x^2 + 1/2\,x - 8 & \text{(el polinomio A ordenado y completo)} \\ +\; -5x^4 + 7x^3 + 0x^2 + 3x - 10 & \text{(el polinomio B ordenado y completo)} \\ \hline -3x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 7/2\,x - 18 & \end{array}$$

Si falta algún término de alguno de los grados, se puede completar con 0, como en el ejemplo en el segundo polinomio se completó con $0x^2$. Y se los suele ordenar de mayor a menor grado, para que en cada columna queden los términos de igual grado.

$$P(x) + Q(x) = -3x^4 + 6x^3 - 3x^2 + \frac{7}{2}x - 18$$

Realizando la suma sin ordenar los términos semejantes con semejante…

En este caso, basta con sumar entre sí los términos semejantes no importa cómo se disponga a los polinomios. Si los vamos a colocar uno sobre otro, tenemos que ubicar en la misma columna a los semejantes, pero no hace falta que estén ordenados por grado, ni completos los polinomios, ya que se puede dejar el espacio del grado que falta y eso nos indica que allí no hay nada que sumar.

Por ejemplo:

Lo que hacemos es colocar el primer polinomio P(x) tal como se presenta, y cuando puse el otro polinomio abajo, cuidé de acomodar sus términos según los de arriba, para que coincida el grado y así queden en columna los términos semejantes. Como el polinomio Q(x) no

$$\begin{array}{rl} -4x + 2x^4 - 1 - 5x^3 & \text{(desordenado e incompleto)} \\ +\; 7x - 5x^4 + 3x^2 & \text{(desordenado e incompleto, pero "acomodado")} \\ \hline 3x - 3x^4 - 1 - 5x^3 + 3x^2 & \end{array}$$

tenía término de grado 0 y de grado 3, quedó el espacio libre debajo de esos términos de P(x). Y luego, como Q(x) tenía término de grado 2, y P(x) no, a ese término lo ubicamos al final de todo para que quede claro que no lo estamos sumando con nada.

Así, se pueden acomodar de cualquier manera, mientras que en la misma columna queden siempre términos semejantes (de igual potencia o grado en polinomios de una sola letra como éstos).

Otra forma de disponer cómo sumar polinomios…

Se suelen sumar los polinomios en un "mismo renglón".

$$P(x) = 3x^2 + 2x^4 - 8 - x^3 + \frac{1}{2}x$$

$$Q(x) = -5x^4 - 10 + 3x + 7x^3$$

Para calcular P(x) + Q(x):

Los colocamos entre paréntesis, sumando:

$$(- 3x^2 + 2x^4 - 8 - x^3 + 1/2\ x) + (-5x^4 - 10 + 3x + 7x^3) =$$

Quitamos los paréntesis:

$$- 3x^2 + 2x^4 - 8 - x^3 + 1/2\ x - 5x^4 - 10 + 3x + 7x^3 =$$

Al quitar paréntesis que tienen un signo "+" delante, o que no tienen nada delante (lo que equivale a tener un signo "+"), los términos quedan con el mismo signo que tenían.

Juntamos los términos de igual grado…

Ahora, sumamos entre sí los coeficientes de los términos que poseen igual grado. En ocasiones, se prefiere hacer un paso previo para cambiar el orden de los términos, colocando juntos a los términos que son de igual grado, y sumarlos luego en otro paso. Se puede cambiar el orden de los términos por la Propiedad Conmutativa de la suma (a + b = b + a).

$$2x^4 - 5x^4 - 8 - 10 - x^3 + 7x^3 + 1/2\ x + 3x - 3x^2 =$$

Así, se pueden ver juntos los términos que hay que sumar: los dos primeros que son de grado 4, los números que están solos, los de grado 3, los de grado 1, y se ve que de grado 2 hay uno solo y entonces no se lo podrá sumar con nada. Y ahora, sumamos entre sí los términos de igual grado:

Para las x^4: "Junto" $2x^4 - 5x^4 =$ **$-3x^4$**.

Previamente se ha mencionado que "sumamos" los coeficientes, pero 2 + (-5) es lo mismo que 2 - 5, entonces, ya no hace falta pensar en que "sumamos". A partir de ahora, cuando "juntamos", lo que realmente estaremos haciendo es "hacer la cuenta" entre sus coeficientes, y ya no se colocará el signo de suma entre los términos, porque es igual si no está. Es algo que debes saber ya desde que en el ciclo básico aprendiste a sumar números enteros.

El término $2x^4$ es positivo, porque en el polinomio estaba sumando. El signo del coeficiente de cada término es el signo que tiene adelante el término. Por la misma razón, el término $-5x^4$ es negativo, porque en el polinomio estaba restando: tenía un signo menos adelante.

Para los "números solos" (términos independientes o de grado 0): - 8 - 10 = **-18**

Para las x^3: "Junto" $-x^3 + 7x^3 =$ **$6x^3$**. (Recordemos que $-x^3$ es lo mismo que $-1x^3$. Entonces la cuenta entre los coeficientes es -1 + 7 = 6)

Para las x: "Junto" $1/2\ x + 3x =$ **$7/2\ x$**.

Para las x^2: Hay un solo término con x^2, así que ése queda igual: **$-3x^2$**.

Armando el resultado… Entonces el resultado de la suma es un polinomio formado por todos esos términos, cada uno con su signo (recordemos que "sin signo" es lo mismo que "positivo", entonces los términos que dieron así van a quedar sumando en el polinomio), en cualquier orden. Resultado:

$$-3x^4 - 18 + 6x^3 + \frac{7}{2}x - 3x^2$$

Sin quitar los paréntesis, para que puedas observar cómo se están sumando los polinomios…

$(-3x^2 + 2x^4 - 8 - x^3 + 1/2\ x) + (-5x^4 - 10 + 3x + 7x^3) =$

Para las x^4:

$+2x^4 + (-5x^4) = [+2 + (-5)]x^4 = (+2 - 5)x^4 = -3x^4$

Para los números solos:

$-8 + (-10) = -8 - 10 = -18$

Para las x^3:

$-x^3 + (+7x^3) = [(-1) + (+7)]x^3 = (-1 + 7)x^3 = 6x^3$

Para las x:

$+1/2\ x + (+3x) = [+1/2 + (+3)]x = (1/2 + 3)x = 7/2\ x$

Resultado:

$-3x^2 + (-3x^4) + (-18) + 6x^3 + 7/2\ x =$

$$-3x^2 + (-3x^4) + (-18) + 6x^3 + \frac{7}{2}x = -3x^2 - 3x^4 - 18 + 6x^3 + \frac{7}{2}x$$

La resta de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, es el polinomio $P(x) - Q(x) = P(x) + (-1)Q(x)$.

Para restar polinomios resulta conveniente ordenarlos según potencias decrecientes de *x* y completar los términos que faltan escribiendo dichos términos con coeficiente cero. Ahora, veremos dos ejemplos de resta de polinomios.

Cuando los polinomios son de igual grado. Sean los polinomios…

$$P(x) = -3x^2 + 9x^4 - 8 - 4x^3 + \frac{1}{2}x$$

$$Q(x) = 5x^4 - 10 + 3x + 7x^3$$

$$\begin{array}{rl} & 9x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 1/2\ x - 8 \quad \text{(el polinomio A ordenado y completo)} \\ - & 5x^4 + 7x^3 + 0x^2 + 3x - 10 \quad \text{(el polinomio B ordenado y completo)} \\ \hline \end{array}$$

La resta se puede transformar, en suma, cambiando todos los signos del segundo polinomio:

$$\begin{array}{rl} & 9x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 1/2\ x - 8 \\ + & -5x^4 - 7x^3 + 0x^2 - 3x + 10 \quad \text{(el polinomio B con los signos cambiados)} \\ \hline & 4x^4 - 11x^3 - 3x^2 - 5/2\ x + 2 \end{array}$$

Resultado:

$$4x^4 - 11x^3 - 3x^2 - \frac{5}{2}x + 2$$

Para restar polinomios se suelen cambiar los signos de todos los términos del polinomio que se resta ("el de abajo"), y transformar la resta, en suma, ya que restar es lo mismo que sumar el "opuesto". Pero también se puede hacer restando los coeficientes del mismo grado.

EJERCICIO 09: realiza (en tu cuaderno de apuntes) las siguientes operaciones de suma de polinomios, desarrolla cada uno de los procedimientos en el subrayado (central), escribe la respuesta en el subrayado (derecho).

1) P(x) + Q(x)

$P(x) = 5x^2 - 7x + 3$
$Q(x) = -5x^2 + 2x$

2) P(x) + R(x)

$P(x) = 5x^2 - 7x + 3$
$R(x) = x^3 + x^2 + 2$

3) S(x) – T(x)

$S(x) = x^4 + x^2 + 2$
$T(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

4) M(x) – N(x)

$M(x) = x^3 + x^2 - x + 1$
$N(x) = 2x^2 + 3x + 4$

5) Q(x) + R(x)

$Q(x) = -5x^2 + 2x$
$R(x) = x^3 + x^2 + 2$

6) P(x) – Q(x)

$P(x) = x^3 + x^2 - x + 1$
$Q(x) = 2x^2 + 3x + 4$

7) O(x) + P(x)

$O(x) = x^5 - 2x^3 + 4x^2 - 6$
$P(X) = x^5 + x^4 + 3x^2 + 4x + 5$

8) V(x) – W(x)

$V(x) = 8x^2 - 2x + 1$
$W(x) = 3x^2 + 5x - 8$

9) A(x) + B(x)

$A(x)= 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$
$B(x) = x^2 + 1 - 3x$

10) P(x) + Q(x)

$P(x) = -7x^4 + 6x^2 + 6x + 5$
$Q(x) = -2x^2 + 2 + 3x^5$

11) P(x) – Q(x)

$P(x) = -7x^4 + 6x^2 + 6x + 5$
$Q(x) = -2x^2 + 2 + 3x^5$

12) P(x) + Q(x) + R(x)

$P(x) = -7x^4 + 6x^2 + 6x + 5$
$Q(x) = -2x^2 + 2 + 3x^5$
$R(x) = x^3 -x^5 + 3x^2$

13) P(x) – Q(x) – R(x)

$P(x) = -7x^4 + 6x^2 + 6x + 5$
$Q(x) = -2x^2 + 2 + 3x^5$
$R(x) = x^3 -x^5 + 3x^2$

14) R(x) + P(x) – Q(x) =

$R(x) = x^3 -x^5 + 3x^2$
$P(x) = -7x^4 + 6x^2 + 6x + 5$
$Q(x) = -2x^2 + 2 + 3x^5$

15) P(x) – R(x) + Q(x)

$P(x) = -7x^4 + 6x^2 + 6x + 5)$
$R(x) = x^3 -x^5 + 3x^2$
$Q(x) = -2x^2 + 2 + 3x^5)$

PRODUCTO DE POLINOMIOS

PRODUCTO DE UN NÚMERO REAL POR UN POLINOMIO

Sí, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ y k es un número real,

…entonces: $k \cdot P(x) = (k \cdot a_n)x^n + (k \cdot a_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (k \cdot a_2)x^2 + (k \cdot a_1)x + (k \cdot a_0)$.

Por ejemplo:

Si $P(x) = 5x^3 + 2x^2 - 5x + 2$,

Al momento de multiplicarlo por el número real (-3), entonces…

$$(-3) \cdot P(x) = -15x^3 - 6x^2 + 15x - 6$$

PRODUCTO DE POLINOMIO POR POLINOMIO

Para realizar el producto de dos polinomios es necesario aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma y las propiedades del producto y de la potenciación.

Por ejemplo:

$$P(x) = x^2 - 3x + 5 \qquad Q(x) = 2x$$

$$\begin{aligned} P(x)\cdot Q(x) &= (x^2 - 3x + 5)\cdot(2x) \\ &= x^2\cdot 2x - 3x\cdot 2x + 5\cdot 2x \\ &= 2x^3 - 6x^2 + 10x \end{aligned}$$

El grado de $P(x)\cdot Q(x)$ es 3.

Otro ejemplo:

$$P(x) = x^2 - 3x + 5 \qquad R(x) = x^3 - 4x^2 + 3$$

$$\begin{aligned} P(x)\cdot R(x) &= (x^2 - 3x + 5)\cdot(x^3 - 4x^2 + 3) \\ &= x^5 - 4x^4 + 3x^2 - 3x^4 + 12x^3 - 9x + 5x^3 - 20x^2 + 15 \\ &= x^5 - 7x^4 + 17x^3 - 17x^2 - 9x + 15 \end{aligned}$$

El grado de $P(x)\cdot R(x)$ es 5.

¡OBSERVACIONES!

- Al multiplicar polinomios hay que tener mucho cuidado al eliminar paréntesis ya que los signos pueden ser afectados. Un signo fuera de un paréntesis afecta a todos los términos dentro del paréntesis.
- El procedimiento general es multiplicar cada término de un polinomio por todos los términos del otro y posteriormente A6ucir términos semejantes.
- Se sugiere que primero se practique ejemplos de dos o tres términos a lo más de manera amplia y después se realicen ejemplos más grandes, que de esta manera NO deben de ofrecer obstáculo alguno.

EJERCICIO 12: realiza las siguientes operaciones de producto de número real por polinomio y de polinomios. Utiliza el subrayado para realizar la operatoria, reducción y/o agrupación. Luego, escribe la respuesta.

1) $(3x^2 + 5x - 6)(8x^2 - 3x + 4) =$

2) $(5x^3 - 4x^2 + x - 2)(x^3 - 7x^2 + 3) =$

3) $(5x^3 - 4x^2 + x - 2)(x^3 - 7x^2 + 3) =$

4) $(2x^4 - 3x^2 + 5x)(3x^5 - 2x^3 + x - 2) =$

5) $(-x^6 + x^5 - 2x^3 + 7)(x^2 - x + 1) =$

6) $(x^2y^2 - 2xy)(2xy + 4) =$

7) $10\,(x - 5 + y - 5) + (10 - x)(10 - y) =$

8) $\left(x^2 - 4x + \frac{3}{2}\right)(x + 2) =$

9) $\left(x^2 + \frac{5x}{2} + \frac{35}{3}\right)(x - 6) =$

10) $(2x^2 + 4x + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right) =$

11) $(x + 3)(x + 5) =$

12) $(2x - 5)(3x - 2) =$

13) $(x^2 + 2xy + y^2)(x + y) =$

14) $(x^4 + x^2y^2 + y^4)(x^2 - y^2) =$

15) $(x^2 + 2x + 4)(x + 1) =$

16) $-2P(x) = -2(x^2 - 4x + 2) =$

17) $4Q(x) = 4(2x^3 + x^2 + 5) =$

18) $(2x^2 - 3)(2x^2 - 3x^2 + 4x) =$

19) $(x - 1)(3x + 2) =$

20) $(x - 2)(x - 3) =$

CASOS ESPECIALES DEL PRODUCTO DE POLINOMIOS

Los productos que se muestran en el siguiente cuadro suelen presentarse con frecuencia en cálculos algebraicos.

Producto	Nombre
$(x+a)\cdot(x-a)=x^2-ax+ax-a^2=x^2-a^2$ $\boxed{(x+a)\cdot(x-a)=x^2-a^2}$	Diferencia de cuadrados
Cuadrado de un binomio $(x+a)^2=(x+a)\cdot(x+a)=x^2+ax+ax+a^2$ $\boxed{(x+a)^2=x^2+2ax+a^2}$ $(x-a)^2=(x-a)\cdot(x-a)=x^2-ax-ax+a^2$ $\boxed{(x-a)^2=x^2-2ax+a^2}$	Trinomio cuadrado perfecto Trinomio cuadrado perfecto
Cubo de un binomio $(x+a)^3=(x+a)\cdot(x+a)\cdot(x+a)$ $=(x^2+2ax+a^2)\cdot(x+a)$ $=x^3+ax^2+2ax^2+2a^2x+a^2x+a^3$ $=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$ $\boxed{(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3}$ $\boxed{(x-a)^3=x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}$	Cuatrinomio cubo perfecto Cuatrinomio cubo perfecto

¡IMPORTANTE! En la siguiente unidad te ampliaremos estos casos especiales de producto de polinomios. Siguiendo con la siguiente operación entre polinomios.

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Cuando se realiza una división entre números se procede del siguiente modo:

$$\begin{array}{r|l} 9 & 4 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$$

Se verifica que $9=4\cdot 2+1$

$$\begin{array}{c|l} \text{dividendo} & \text{divisor} \\ \hline \text{.......} & \text{cociente} \\ \text{resto} & \end{array}$$

Dividendo = divisor × cociente + resto

La división de polinomios se efectúa empleando el mismo procedimiento que se usa para dividir los números reales.

Se recuerda que es necesario ordenar los polinomios según las potencias decrecientes de *x* y completar los términos que faltan escribiendo dichos términos con coeficiente nulo.

Dados $P(x)=2x^4-7x^3+5x^2+4x+5$ y $Q(x)=x^2-2x+1$, el polinomio cociente entre $P(x)$ y $Q(x)$ es el polinomio $C(x)$ que se obtiene siguiendo el procedimiento que se muestra a continuación.

1) Se divide el primer término del dividendo $P(x)$ por el primer término del divisor $Q(x)$.

$$2x^4 : x^2 = 2x^2$$

Se obtiene el primer término del cociente $C(x)$.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 4x + 5 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} & 2x^2 \end{array}$$

2) El término de $C(x)$ se multiplica por el divisor.

El producto se resta al dividendo (o se cambia de signo y se suma).

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 4x + 5 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} -\left(2x^4 - 4x^3 + 2x^2\right) & 2x^2 \\ \cline{1-1} -3x^3 + 3x^2 + 4x + 5 & \end{array}$$

3) Con $-3x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ como nuevo dividendo se repiten los pasos 1) y 2).

Así se obtiene otro término del cociente.

$$-3x^3 : x^2 = -3x$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 4x + 5 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} -\left(2x^4 - 4x^3 + 2x^2\right) & 2x^2 - 3x \\ \cline{1-1} -3x^3 + 3x^2 + 4x + 5 & \\ -\left(-3x^3 + 6x^2 - 3x\right) & \\ \cline{1-1} -3x^2 + 7x + 5 & \end{array}$$

4) El proceso continúa hasta que no se puedan obtener más términos del cociente.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 4x + 5 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} -\left(2x^4 - 4x^3 + 2x^2\right) & 2x^2 - 3x - 3 \\ \cline{1-1} -3x^3 + 3x^2 + 4x + 5 & \\ -\left(-3x^3 + 6x^2 - 3x\right) & \\ \cline{1-1} -3x^2 + 7x + 5 & \\ -\left(-3x^2 + 6x - 3\right) & \\ \cline{1-1} x + 8 & \end{array}$$

Cociente: $C(x) = 2x^2 - 3x - 3$

Resto: $R(x) = x + 8$

Es importante tener en cuenta que:

- La división $P(x) : Q(x)$ puede efectuarse siempre que $grado(P(x)) \geq grado(Q(x))$.
- $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$.
- El grado del resto debe ser menor que el grado del divisor, o bien $R(x) = 0$.

$$grado(R(x)) < grado(Q(x))$$

- $grado(C(x)) = grado(P(x)) - grado(Q(x))$.

DIVISIÓN SINTÉTICA

La División Sintética es un procedimiento abreviado para realizar la división de un polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ de grado n, esto es $a_n \neq 0$, entre un polinomio lineal $x - c$. El procedimiento para realizar esta división es muy simple, primero se toman todos los coeficientes del polinomio $P(x)$ y la constante c, con estos se construye una especie de ''casita'' que ayudará en el proceso:

$$\begin{array}{ccccc|c} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & \\ & & & & & c \\ \hline \end{array}$$

Lo primero es ''bajar'' el coeficiente a_n, a este coeficiente también lo denotamos por b_{n-1}, luego se multiplica por la constante c, el resultado se coloca en la segunda columna y se suma al siguiente coeficiente a_{n-1}, al resultado lo denotamos b_{n-2}

$$\begin{array}{ccccc|c} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & \\ \vdots & cb_{n-1} & & & & c \\ \hline \underbrace{a_n}_{b_n-1} & \underbrace{cb_{n-1}+a_{n-1}}_{b_n-2} & & & & \end{array}$$

Este último resultado se multiplica nuevamente por c y se le suma al coeficiente a_{n-2} y el proceso se repite hasta llegar a a_0. Los resultados parciales que se obtienen se denotan por b_{n-1}, b_{n-2}, $\cdots$, b_1, b_0 (se inicia con b_{n-1} pues el cociente tiene un grado menos que el dividendo), y el último valor obtenido se denota por r, pues es el residuo de la división, de esta manera lo que se obtiene es:

$$\begin{array}{ccccc|c} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & \\ \vdots & cb_{n-1} & \cdots & & & c \\ \hline \underbrace{a_n}_{b_n-1} & \underbrace{cb_{n-1}+a_{n-1}}_{b_n-2} & \cdots & \underbrace{cb_1+a_1}_{b_0} & \underbrace{cb_0+a_0}_{r} & \end{array}$$

Así, el cociente de la división de $P(x)$ por $x - c$ es $b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x^1 + b_0$ con un residuo r, en donde los coeficientes se detallan como:

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ b_{n-2} &= cb_{n-1} + a_{n-1} \\ b_{n-3} &= cb_{n-2} + a_{n-2} \\ &\vdots \\ b_1 &= cb_2 + a_2 \\ b_0 &= cb_1 + a_1 \\ r &= cb_0 + a_0 \end{aligned}$$

Ejemplo. Realiza la división de $P(x) = 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x + 2$ entre $x + 2$.

Solución. Al realizar el algoritmo de la división sintética con los coeficientes de $P(x)$ y -2 como valor de c se obtiene

$$\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & -1 & 4 & 2 & \\ & -6 & 8 & -14 & 20 & -2 \\ \hline 3 & -4 & 7 & -10 & 22 & \end{array}$$

Así, el cociente de la división de $P(x)$ entre $x + 2$ es $3x^3 - 4x^2 + 7x - 10$ y se obtiene un residuo $r = 22$.

INFORMACIÓN (INCLUÍDA EN ESTE DOCUMENTO EDUCATIVO) TOMADA DE:

Sitios web:

http://agrega.educacion.es/repositorio/16052015/80/es_2015051612_9152258/index.html

http://calculo.cc/Problemas/Problemas_bachillerato/primero_ciencias_sociales/polinomios/polinomios_1.html

http://desenderismo.com/bricomates/?page_id=25

http://matematicasmodernas.com/valor-numerico-de-un-polinomio/

http://matematicaylisto.webcindario.com/polinomios/operacio/division.htm

http://matematicaylisto.webcindario.com/polinomios/operacio/resta.htm

http://matematicaylisto.webcindario.com/polinomios/operacio/suma.htm

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Polinomios/polinomios1.htm

http://www.aulafacil.com/cursos/l10672/ciencia/matematicas/fracciones-monomios-polinomios-algebra/multiplicacion-de-un-polinomio-por-un-monomio-y-producto-de-un-polinomio-por-otro-polinomio

http://www.colexioabrente.com/descargas/mate/4eso/4eso1.2.2polinomios.pdf

http://www.ditutor.com/polinomios/polinomios_iguales.html

http://www.fi.unsj.edu.ar/descargas/ingreso/Unidad5.pdf

http://www.vadenumeros.es/cuarto/ejercicios-de-polinomios.htm

http://www.vitutor.com/ab/p/a_7.html

http://www.vitutor.com/ab/p/p_e.html

https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/ContribucionesV3n3002/0divisint/node1.html

https://www.ecured.cu/Multiplicaci%C3%B3n_de_polinomios

https://www.geogebra.org/m/ahezpgfa